

## 和と差の積の公式を使って2次関数を標準形に変形する方法-2

川口東高等学校 元吉 隆夫

昨年度発表させていただいた、2次関数を和と差の積の公式を利用して標準形に変形する指導法の改良版を紹介する。今回の方法を用いれば、2乗の係数が1でない場合でも、きわめて簡潔な計算によって標準形へ変形することができる。

## ○和と差の積の公式を用いる変形法とその改良

昨年度の発表では、標準形の変形に和と差の積の公式を用いる方法を紹介し、従来の方法と比較して、計算の流れが素直であること等の利点を確認した。更に今回は、和と差の積の公式に独特な意味付けをし、公式に当てはめるのが苦手な生徒でも、簡単な計算で答が出せるような工夫を加えた。

## ○実際の指導の流れ

実際の授業の流れは以下の[1]から[4]のようになる。

## [1]和と差の積の公式の意味

下の式を展開すると、中学で習ったように

$$(a+2)(a+3) = a^2 + 3a + 2a + 6$$

となります。ところが、 $(a+3)(a-3)$ は展開すると

$$(a+3)(a-3) = a^2 - \underbrace{3a + 3a}_{\substack{\text{打ち消して} \\ \text{なくなる}}} - 9 = a^2 - 9$$

のように、中の2つの項が消えて、( )の中の左側どうしの積と、右側どうしの積しか残りません。このような結果から「 $(A+B)(A-B)$ の形の式を展開するときは、左側どうしの積と右側どうしの積のみを計算すればよい」ということがわかります。これが、和と差の積の公式

$$(A+B)(A-B) = A^2 - B^2$$

の意味と考えることができます。

例

$$(2a+5)(2a-5) = 4a^2 - 25$$

↓            ↓  
左            右  
ど            ど  
う            う  
し            し  
の            の  
積            積

$$2a \times 2a \quad 5 \times (-5)$$

もっと複雑な式  $(a+b+3)(a+b-3)$  の場合も、 $a+b$  をひとつのまとまりと考えれば

$$\begin{array}{ccccccc} \underbrace{(a+b+3)}_{\text{左}} & \underbrace{(a+b-3)}_{\text{右}} & = & \underbrace{(a+b)^2}_{\text{左}\times\text{左}} & - & \underbrace{9}_{\text{右}\times\text{右}} \\ & & & \downarrow & & \downarrow \\ & & & \text{左}\times\text{左} & & \text{右}\times\text{右} \end{array}$$

というように計算することができます。

## [2] $x^2$ の係数が 1 の 2 次関数の変形

この公式を用いて、2 次関数をグラフの様子が変わる形に変形してみましょう。

例  $y = x^2 + 6x + 5$  ) 2 乗と 1 乗の項を  $x$  で括る

$$= x(x+6) + 5$$

(1) 定数項を半分に分け、 $x+6$  を  $x+3+3$  に変形

$$= \underbrace{(x+3-3)}_{\text{左}} \underbrace{(x+3+3)}_{\text{右}} + 5$$

(2)  $x$  を右の ( ) 内と似た形の  $x+3-3$  に変形

$$= (x+3)^2 - 9 + 5$$

左×左 右×右

$$= (x+3)^2 - 4$$

※上から 3 番目の式の右端の定数項 5 に、「しっぽ」という名前をつけて、「右×右」のところを「右×右+しっぽ」という計算に置き換えれば、式を 1 段省略することができます。まとめると、次のようになります。

$x^2$  の係数が 1 のときの標準形への変形法

$$\begin{array}{l} y = x^2 + 6x + 5 \\ = x(x+6) + 5 \\ = \underbrace{(x+3-3)}_{\text{左}} \underbrace{(x+3+3)}_{\text{右}} + \underbrace{5}_{\text{しっぽ}} \\ = (x+3)^2 - 4 \end{array}$$

左×左 右×右+しっぽ

## [3] 和と差の積の前に定数倍がついているとき

和と差の積の公式の意味がよくわかったので、 $3(a+2)(a-2)$  のような式の展開をいっぺんにやっても、混乱しないでしょう。和と差の積だけなら「左・左と右・右」ですが、

その前に3がついているので、これらがどちらも3倍されます。先頭の3のことを「頭」と呼ぶことにすれば、「頭・左・左と頭・右・右」になるわけです。

$$3(a+2)(a-2)$$

頭 左 右   左 右

$$= 3a^2 - 12$$

$\swarrow$   
 頭・左・左

$\searrow$   
 頭・右・右

[4]  $x^2$  の係数が1でない2次関数の変形

ここまでくれば、一般の2次関数をグラフの様子が変わる形に変形することができます。

例  $y = 3x^2 - 12x + 17$

$$= 3x(x-4) + 17$$

) 2乗と1乗の項を3xで括る

$$= 3(x-2+2)(x-2-2) + 17$$

) (1) 定数項を半分に分け、 $x-4$ を $x-2-2$ に変形  
(2)  $x$ を右の( )内と似た形の $x-2+2$ に変形

頭 左 右   左 右   しば

[3]との違いは+17という「しば」がついていることです。このことから、今回は「頭・左・左」と「頭・右・右+しば」という計算をすればよいことがわかります。

$$= 3(x-2)^2 + 5$$

$\swarrow$   
 頭・左・左

$\searrow$   
 頭・右・右+しば

$x^2$ の係数が1でないときの標準形への変形法

$$y = 3x^2 - 12x + 17$$

$$= 3x(x-4) + 17$$

$$= 3(x-2+2)(x-2-2) + 17$$

頭 左 右   左 右   しば

$$= 3(x-2)^2 + 5$$

$\swarrow$   
 頭・左・左

$\searrow$   
 頭・右・右+しば

<参照していただきたい資料>

元吉『和と差の積の公式を使って2次関数を標準形に変形する方法』

平成24年度埼玉県高等学校数学教育発表会 発表資料